

QU'EST-CE QUE L'INFINI ? · SÉANCE 6

La diagonale, et Cantor–Bernstein

Cantor, 1891 ; Cantor–Bernstein

Université Paris 1 — Panthéon-Sorbonne

PARTIE 1

Retour sur le travail

Proposition 6.1

L'application $A \mapsto \sum_{a \in A} 2^a$ est une bijection de l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
En particulier, les parties finies de $\mathbb{N}$ forment un ensemble dénombrable.

Proposition 6.1

L'application $A \mapsto \sum_{a \in A} 2^a$ est une bijection de l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
En particulier, les parties finies de $\mathbb{N}$ forment un ensemble dénombrable.

La base 2

$13 = 8 + 4 + 1 = 1101_2$: les chiffres 1 sont aux positions 0, 2 et 3, et 13 est l'image de $\{0, 2, 3\}$. Le nombre 0 est l'image de $\emptyset$.

Tout entier s'écrit d'une et d'une seule manière en base 2 : chaque entier est l'image d'exactly une partie finie.

Proposition 6.1

L'application $A \mapsto \sum_{a \in A} 2^a$ est une bijection de l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
En particulier, les parties finies de $\mathbb{N}$ forment un ensemble dénombrable.

La base 2

$13 = 8 + 4 + 1 = 1101_2$: les chiffres 1 sont aux positions 0, 2 et 3, et 13 est l'image de $\{0, 2, 3\}$. Le nombre 0 est l'image de $\emptyset$.

Tout entier s'écrit d'une et d'une seule manière en base 2 : chaque entier est l'image d'exactly une partie finie.

Et l'ensemble de **toutes** les parties de $\mathbb{N}$, finies ou non? Le 13/11.

La question 4

$0,c_1c_2c_3\dots_2$ désigne la limite de $\frac{c_1}{2}, \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4}, \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{c_3}{8}, \dots$

$$\frac{1}{2} = 0,1_2 \quad \frac{1}{4} = 0,01_2 \quad \frac{3}{4} = 0,11_2 \quad \frac{1}{3} = 0,010101\dots_2$$

car $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ tend vers $\frac{1}{3}$: le calcul de Zénon, avec $\frac{1}{4}$ au lieu de $\frac{1}{2}$.

La question 4

$0,c_1c_2c_3\dots_2$ désigne la limite de $\frac{c_1}{2}, \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4}, \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{c_3}{8}, \dots$

$$\frac{1}{2} = 0,1_2 \quad \frac{1}{4} = 0,01_2 \quad \frac{3}{4} = 0,11_2 \quad \frac{1}{3} = 0,010101\dots_2$$

car $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ tend vers $\frac{1}{3}$: le calcul de Zénon, avec $\frac{1}{4}$ au lieu de $\frac{1}{2}$.

Deux écritures, encore

$0,1_2 = 0,0111\dots_2$, pour la même raison que $0,5 = 0,4999\dots$ Retenez-le : c'est le piège de tout à l'heure.

La question 3 : votez

Le travail demandait

Une application injective de $[0, 1]$ dans $]0, 1[$, et une application injective de $]0, 1[$ dans $[0, 1]$.

La question 3 : votez

Le travail demandait

Une application injective de $[0, 1]$ dans $]0, 1[$, et une application injective de $]0, 1[$ dans $[0, 1]$.

Existe-t-il une bijection de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$?

La question 3 : votez

Le travail demandait

Une application injective de $[0, 1]$ dans $]0, 1[$, et une application injective de $]0, 1[$ dans $[0, 1]$.

Existe-t-il une bijection de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$?

Gardez votre réponse : nous y reviendrons après la pause.

PARTIE 2

La diagonale (1891)

Dix-sept ans plus tard

1891

Dans un court article, Cantor donne une **seconde démonstration** que l'on ne peut pas numéroter les nombres réels.

1891

Dans un court article, Cantor donne une **seconde démonstration** que l'on ne peut pas numéroter les nombres réels.

Il souligne qu'elle se passe entièrement des nombres irrationnels : elle porte sur des suites infinies formées de **deux lettres seulement** (il les écrit m et w).

Cette méthode, dite **diagonale**, est devenue l'une des plus célèbres des mathématiques.

Définition 6.3

Une **suite binaire** est une suite infinie $s(0), s(1), s(2), \dots$ dont chaque terme vaut 0 ou 1. On écrit $s = s(0) s(1) s(2) \dots$, par exemple 0101 ... ou 1000 ...

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites binaires. Deux suites sont **égales** si elles ont le même terme à chaque place.

Définition 6.3

Une **suite binaire** est une suite infinie $s(0), s(1), s(2), \dots$ dont chaque terme vaut 0 ou 1. On écrit $s = s(0) s(1) s(2) \dots$, par exemple 0101 ... ou 1000 ...

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites binaires. Deux suites sont **égales** si elles ont le même terme à chaque place.

Une suite binaire est un « mot infini » sur l'alphabet $\{0, 1\}$. Les mots *finis* forment un ensemble dénombrable (proposition 4.10).

Et les mots infinis ?

Le théorème de 1891

Théorème 6.4 (Cantor, 1891)

Soit $s_0, s_1, s_2, \dots$ une liste **quelconque** de suites binaires. La suite binaire d définie par

$$d(n) = 1 - s_n(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

n'est **aucune** des s_n .

Le théorème de 1891

Théorème 6.4 (Cantor, 1891)

Soit $s_0, s_1, s_2, \dots$ une liste **quelconque** de suites binaires. La suite binaire d définie par

$$d(n) = 1 - s_n(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

n'est **aucune** des s_n .

Démonstration

d est une suite binaire : si $s_n(n) = 0$, alors $d(n) = 1$; si $s_n(n) = 1$, alors $d(n) = 0$.

Pour chaque n , d et s_n **diffèrent à la place** n : $d(n) \neq s_n(n)$. Donc $d \neq s_n$. □

La diagonale

$$\begin{array}{rcccccccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ s_0 = & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ s_1 = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ s_2 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ s_3 = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ s_4 = & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ & \vdots & & & & & \ddots & \\ \hline d = & & & & & & & \end{array}$$

La diagonale

	0	1	2	3	4	5	
$s_0 =$	1	0	1	1	0	0	...
$s_1 =$	0	0	0	0	0	0	...
$s_2 =$	1	1	1	1	1	1	...
$s_3 =$	0	1	0	1	0	1	...
$s_4 =$	1	1	0	0	1	1	...
$\vdots$						$\ddots$	

 $d =$

La diagonale

	0	1	2	3	4	5	
$s_0 =$	1	0	1	1	0	0	...
$s_1 =$	0	0	0	0	0	0	...
$s_2 =$	1	1	1	1	1	1	...
$s_3 =$	0	1	0	1	0	1	...
$s_4 =$	1	1	0	0	1	1	...
$\vdots$						$\ddots$	

$$d = \quad \mathbf{0}$$

La diagonale

	0	1	2	3	4	5	
$s_0 =$	1	0	1	1	0	0	...
$s_1 =$	0	0	0	0	0	0	...
$s_2 =$	1	1	1	1	1	1	...
$s_3 =$	0	1	0	1	0	1	...
$s_4 =$	1	1	0	0	1	1	...
$\vdots$						$\ddots$	

$$d = \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1}$$

La diagonale

	0	1	2	3	4	5	
$s_0 =$	1	0	1	1	0	0	...
$s_1 =$	0	0	0	0	0	0	...
$s_2 =$	1	1	1	1	1	1	...
$s_3 =$	0	1	0	1	0	1	...
$s_4 =$	1	1	0	0	1	1	...
$\vdots$						$\ddots$	
$d =$	0	1	0				

La diagonale

	0	1	2	3	4	5	
$s_0 =$	1	0	1	1	0	0	...
$s_1 =$	0	0	0	0	0	0	...
$s_2 =$	1	1	1	1	1	1	...
$s_3 =$	0	1	0	1	0	1	...
$s_4 =$	1	1	0	0	1	1	...
$\vdots$						$\ddots$	
$d =$	0	1	0	0			

La diagonale

	0	1	2	3	4	5	
$s_0 =$	1	0	1	1	0	0	...
$s_1 =$	0	0	0	0	0	0	...
$s_2 =$	1	1	1	1	1	1	...
$s_3 =$	0	1	0	1	0	1	...
$s_4 =$	1	1	0	0	1	1	...
$\vdots$						$\ddots$	
$d =$	0	1	0	0	0	0	...

La diagonale

	0	1	2	3	4	5	
$s_0 =$	1	0	1	1	0	0	...
$s_1 =$	0	0	0	0	0	0	...
$s_2 =$	1	1	1	1	1	1	...
$s_3 =$	0	1	0	1	0	1	...
$s_4 =$	1	1	0	0	1	1	...
$\vdots$						$\ddots$	
$d =$	0	1	0	0	0	0	...

On lit la diagonale (en rouge) et l'on change chaque terme : d diffère de s_n à la place n .

Les suites binaires ne sont pas dénombrables

Proposition 6.5

L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites binaires n'est pas dénombrable.

Les suites binaires ne sont pas dénombrables

Proposition 6.5

L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites binaires n'est pas dénombrable.

Démonstration

Sinon, il y aurait une liste $s_0, s_1, s_2, \dots$ dans laquelle figure **chaque** suite binaire. Le théorème 6.4 fournit une suite d qui n'est pas dans la liste : contradiction. $\square$

(Et $\mathcal{S}$ est infini : 1000 ..., 0100 ..., 0010 ..., ... sont toutes différentes.)

Les suites binaires ne sont pas dénombrables

Proposition 6.5

L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites binaires n'est pas dénombrable.

Démonstration

Sinon, il y aurait une liste $s_0, s_1, s_2, \dots$ dans laquelle figure **chaque** suite binaire. Le théorème 6.4 fournit une suite d qui n'est pas dans la liste : contradiction. $\square$

(Et $\mathcal{S}$ est infini : 1000 ..., 0100 ..., 0010 ..., ... sont toutes différentes.)

La méthode diagonale

On se donne une liste *quelconque*. On fabrique un objet qui diffère du premier élément à la première place, du deuxième à la deuxième place, et ainsi de suite. Cet objet n'est pas dans la liste.

Exercice 1 : la diagonale à la main

$s_0 = 000000 \dots$ $s_1 = 111111 \dots$ $s_2 = 010101 \dots$ $s_3 = 101010 \dots$ $s_4 = 001100 \dots$

(a) Écrire les cinq premiers termes de d .

(b) d commence comme s_3 . À quelle place en diffère-t-elle ?

(c) On place d en tête : $d, s_0, s_1, s_2, \dots$. Écrire les cinq premiers termes de la nouvelle diagonale changée. Est-elle dans la nouvelle liste ?

Exercice 1 : la diagonale à la main

$s_0 = 000000 \dots$ $s_1 = 111111 \dots$ $s_2 = 010101 \dots$ $s_3 = 101010 \dots$ $s_4 = 001100 \dots$

- (a) Écrire les cinq premiers termes de d .
- (b) d commence comme s_3 . À quelle place en diffère-t-elle ?
- (c) On place d en tête : $d, s_0, s_1, s_2, \dots$. Écrire les cinq premiers termes de la nouvelle diagonale changée. Est-elle dans la nouvelle liste ?

Réponses

- (a) Termes diagonaux 0, 1, 0, 0, 0 : $d = 10111 \dots$
- (b) $s_3 = 1010 \dots$, $d = 1011 \dots$: à la place 3.
- (c) Termes diagonaux 1, 0, 1, 1, 1 : la nouvelle diagonale changée commence par 01000. Elle n'est pas dans la nouvelle liste.

PARTIE 3

La diagonale et les réels

Et les nombres réels ?

On voudrait lire les suites comme des **écritures décimales**. Pour que la ligne n et la décimale n se correspondent, numérotons cette fois la liste à partir de 1 : $x_1, x_2, x_3, \dots$ (cela ne change rien).

Et les nombres réels ?

On voudrait lire les suites comme des **écritures décimales**. Pour que la ligne n et la décimale n se correspondent, numérotons cette fois la liste à partir de 1 : $x_1, x_2, x_3, \dots$ (cela ne change rien).

Une idée naturelle

Changer la n -ième décimale de x_n , par exemple en lui ajoutant 1 (9 devient 0).

Et les nombres réels ?

On voudrait lire les suites comme des **écritures décimales**. Pour que la ligne n et la décimale n se correspondent, numérotons cette fois la liste à partir de 1 : $x_1, x_2, x_3, \dots$ (cela ne change rien).

Une idée naturelle

Changer la n -ième décimale de x_n , par exemple en lui ajoutant 1 (9 devient 0).

Mais un réel peut avoir deux écritures (remarque 5.5). C'est un piège.

Le piège des 9

Une liste qui commence ainsi (exercice 2)

$$x_1 = 0,0999 \dots \quad x_2 = 0,5999 \dots \quad x_3 = 0,2599 \dots \quad x_4 = 0,7189 \dots \quad \dots$$

À partir de x_2 , chaque x_n est écrit avec des 9 dès sa n -ième décimale. Appliquez la règle «ajouter 1».

Le piège des 9

Une liste qui commence ainsi (exercice 2)

$$x_1 = 0,0999 \dots \quad x_2 = 0,5999 \dots \quad x_3 = 0,2599 \dots \quad x_4 = 0,7189 \dots \quad \dots$$

À partir de x_2 , chaque x_n est écrit avec des 9 dès sa n -ième décimale. Appliquez la règle «ajouter 1».

La règle donne 1, puis 0,0,0,... : le nombre $c = 0,1000 \dots = \frac{1}{10}$.

Le piège des 9

Une liste qui commence ainsi (exercice 2)

$$x_1 = 0,0999 \dots \quad x_2 = 0,5999 \dots \quad x_3 = 0,2599 \dots \quad x_4 = 0,7189 \dots \quad \dots$$

À partir de x_2 , chaque x_n est écrit avec des 9 dès sa n -ième décimale. Appliquez la règle «ajouter 1».

La règle donne 1, puis 0, 0, 0, ... : le nombre $c = 0,1000 \dots = \frac{1}{10}$.

Or $x_1 = 0,0999 \dots$ **est** $\frac{1}{10}$ (proposition 5.4). **Le nombre fabriqué est dans la liste** : il diffère de x_1 par l'écriture, pas par la valeur.

Deux précautions

Proposition 6.7

Toute suite de chiffres $d_1, d_2, d_3, \dots$ est l'écriture décimale d'un réel, et d'un seul, de $[0, 1]$.

Deux précautions

Proposition 6.7

Toute suite de chiffres $d_1, d_2, d_3, \dots$ est l'écriture décimale d'un réel, et d'un seul, de $[0, 1]$.

L'idée de la preuve

Les intervalles $I_n = [0, d_1 \dots d_n, 0, d_1 \dots d_n + \frac{1}{10^n}]$ sont fermés, bornés, emboîtés, de longueur $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$. Le principe des intervalles emboîtés donne le réel : **la droite réelle n'a pas de trous.**

Deux précautions

Proposition 6.7

Toute suite de chiffres $d_1, d_2, d_3, \dots$ est l'écriture décimale d'un réel, et d'un seul, de $[0, 1]$.

L'idée de la preuve

Les intervalles $I_n = [0, d_1 \dots d_n, 0, d_1 \dots d_n + \frac{1}{10^n}]$ sont fermés, bornés, emboîtés, de longueur $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$. Le principe des intervalles emboîtés donne le réel : **la droite réelle n'a pas de trous.**

Seconde précaution

Choisir les chiffres de façon à **éviter les réels qui ont deux écritures.**

La diagonale pour les réels

Théorème 6.8

Soit $x_1, x_2, x_3, \dots$ une liste quelconque de réels de $]0, 1[$. Il existe un réel $c \in]0, 1[$ qui n'est **aucun** des x_n .

La diagonale pour les réels

Théorème 6.8

Soit $x_1, x_2, x_3, \dots$ une liste quelconque de réels de $]0, 1[$. Il existe un réel $c \in]0, 1[$ qui n'est **aucun** des x_n .

Démonstration

- On choisit une écriture $x_n = 0, a_{n,1} a_{n,2} \dots$ de chaque x_n ; $d_n = 5$ si $a_{n,n} \neq 5$, $d_n = 4$ sinon; $c = 0, d_1 d_2 d_3 \dots$ (proposition 6.7).

La diagonale pour les réels

Théorème 6.8

Soit $x_1, x_2, x_3, \dots$ une liste quelconque de réels de $]0, 1[$. Il existe un réel $c \in]0, 1[$ qui n'est **aucun** des x_n .

Démonstration

- On choisit une écriture $x_n = 0, a_{n,1} a_{n,2} \dots$ de chaque x_n ; $d_n = 5$ si $a_{n,n} \neq 5$, $d_n = 4$ sinon; $c = 0, d_1 d_2 d_3 \dots$ (proposition 6.7).
- **c n'a qu'une écriture** : un réel à deux écritures en a une qui finit par des 0 et une qui finit par des 9. Celle de c ne contient ni 0 ni 9.

La diagonale pour les réels

Théorème 6.8

Soit $x_1, x_2, x_3, \dots$ une liste quelconque de réels de $]0, 1[$. Il existe un réel $c \in]0, 1[$ qui n'est **aucun** des x_n .

Démonstration

- On choisit une écriture $x_n = 0, a_{n,1} a_{n,2} \dots$ de chaque x_n ; $d_n = 5$ si $a_{n,n} \neq 5$, $d_n = 4$ sinon; $c = 0, d_1 d_2 d_3 \dots$ (proposition 6.7).
- **c n'a qu'une écriture** : un réel à deux écritures en a une qui finit par des 0 et une qui finit par des 9. Celle de c ne contient ni 0 ni 9.
- $c \neq x_n$: sinon, l'écriture choisie pour x_n serait la seule écriture de c . Or elles diffèrent à la n -ième décimale. □

La diagonale pour les réels

Théorème 6.8

Soit $x_1, x_2, x_3, \dots$ une liste quelconque de réels de $]0, 1[$. Il existe un réel $c \in]0, 1[$ qui n'est **aucun** des x_n .

Démonstration

- On choisit une écriture $x_n = 0, a_{n,1} a_{n,2} \dots$ de chaque x_n ; $d_n = 5$ si $a_{n,n} \neq 5$, $d_n = 4$ sinon; $c = 0, d_1 d_2 d_3 \dots$ (proposition 6.7).
- **c n'a qu'une écriture** : un réel à deux écritures en a une qui finit par des 0 et une qui finit par des 9. Celle de c ne contient ni 0 ni 9.
- $c \neq x_n$: sinon, l'écriture choisie pour x_n serait la seule écriture de c . Or elles diffèrent à la n -ième décimale. □

Sur la liste du piège : $d_n = 5$ partout, et $c = 0,555 \dots = \frac{5}{9}$.

Deux preuves, deux idées

	1874 (séance 5)	1891 (aujourd'hui)
Ce que l'on fabrique	un point commun à des intervalles emboîtés	une suite qui diffère de la n -ième à la place n
Ce qu'on utilise de $\mathbb{R}$	le principe des intervalles emboîtés	rien, pour les suites ; pour les réels, le même principe (proposition 6.7)
Les décimales	aucune	oui, avec un piège : les réels à deux écritures

Deux preuves, deux idées

	1874 (séance 5)	1891 (aujourd'hui)
Ce que l'on fabrique	un point commun à des intervalles emboîtés	une suite qui diffère de la n -ième à la place n
Ce qu'on utilise de $\mathbb{R}$	le principe des intervalles emboîtés	rien, pour les suites ; pour les réels, le même principe (proposition 6.7)
Les décimales	aucune	oui, avec un piège : les réels à deux écritures

Pourquoi la diagonale marche

Elle ne marche pas « parce que les décimales sont infinies ». Sur les suites binaires, elle ne parle d'aucun nombre. Pour passer aux réels, il faut deux choses de plus : que toute suite de chiffres désigne un réel (pas de trous), et que l'on évite les réels à deux écritures.

PARTIE 4

Exister sans être montré

Exercice 5.4 : vos réponses

La question de la semaine dernière

La preuve de 1874 montre qu'il existe des nombres transcendants sans en écrire aucun.
Est-ce une preuve d'existence aussi bonne qu'un exemple ?

Exercice 5.4 : vos réponses

La question de la semaine dernière

La preuve de 1874 montre qu'il existe des nombres transcendants sans en écrire aucun. Est-ce une preuve d'existence aussi bonne qu'un exemple ?

Trois manières de savoir qu'un objet existe

1. **Le montrer.** Liouville (1844, 1851) écrit des nombres particuliers, par exemple $0,110001000 \dots$ (un 1 aux rangs 1, 2, 6, 24, 120, ...), et démontre que chacun est transcendant.

Exercice 5.4 : vos réponses

La question de la semaine dernière

La preuve de 1874 montre qu'il existe des nombres transcendants sans en écrire aucun. Est-ce une preuve d'existence aussi bonne qu'un exemple ?

Trois manières de savoir qu'un objet existe

1. **Le montrer.** Liouville (1844, 1851) écrit des nombres particuliers, par exemple $0,110001000 \dots$ (un 1 aux rangs 1, 2, 6, 24, 120, ...), et démontre que chacun est transcendant.
2. **Le construire sans le regarder.** Cantor (1874) : à partir d'une liste des algébriques, une procédure fabrique c . La preuve ne dit rien de c , sinon qu'il n'est pas algébrique.

Exercice 5.4 : vos réponses

La question de la semaine dernière

La preuve de 1874 montre qu'il existe des nombres transcendants sans en écrire aucun. Est-ce une preuve d'existence aussi bonne qu'un exemple ?

Trois manières de savoir qu'un objet existe

1. **Le montrer.** Liouville (1844, 1851) écrit des nombres particuliers, par exemple $0,110001000 \dots$ (un 1 aux rangs 1, 2, 6, 24, 120, ...), et démontre que chacun est transcendant.
2. **Le construire sans le regarder.** Cantor (1874) : à partir d'une liste des algébriques, une procédure fabrique c . La preuve ne dit rien de c , sinon qu'il n'est pas algébrique.
3. **Prouver qu'il existe, sans pouvoir le désigner.** Voici un exemple.

Le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est-il rationnel ?

Le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est-il rationnel ?

Proposition 6.9

Il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

Le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est-il rationnel ?

Proposition 6.9

Il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

Démonstration

- Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel : on prend $a = b = \sqrt{2}$, irrationnel (proposition 5.6).

Le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est-il rationnel ?

Proposition 6.9

Il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

Démonstration

- Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel : on prend $a = b = \sqrt{2}$, irrationnel (proposition 5.6).
- Ou bien il ne l'est pas : on prend $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Alors $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.

Le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est-il rationnel ?

Proposition 6.9

Il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

Démonstration

- Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel : on prend $a = b = \sqrt{2}$, irrationnel (proposition 5.6).
- Ou bien il ne l'est pas : on prend $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Alors $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.
- Dans les deux cas, le couple cherché existe. □

Lequel des deux ?

Remarque 6.10

La preuve ne dit pas lequel des deux cas est le bon : elle n'en a pas besoin.

Lequel des deux ?

Remarque 6.10

La preuve ne dit pas lequel des deux cas est le bon : elle n'en a pas besoin.

On sait aujourd'hui que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, et même transcendant (théorème de Gelfond et Schneider, 1934–1935) : c'est le second cas.

Mais il a fallu un théorème difficile pour le savoir, et la preuve ne l'utilise pas.

Kronecker, et le titre de 1874

Leopold Kronecker (1823-1891)

Professeur à Berlin, il n'admettait que les objets constructibles en un nombre fini d'étapes à partir des entiers. On lui prête le mot : « Dieu a fait les nombres entiers ; tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

Kronecker, et le titre de 1874

Leopold Kronecker (1823–1891)

Professeur à Berlin, il n'admettait que les objets constructibles en un nombre fini d'étapes à partir des entiers. On lui prête le mot : « Dieu a fait les nombres entiers ; tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

Une interprétation discutée

Selon J. Dauben, Cantor aurait donné à son article de 1874 un titre modeste, sur les nombres algébriques, sans annoncer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, pour ne pas heurter Kronecker. D'autres historien·nes (J. Ferreirós) insistent sur le rôle de Weierstrass. **Ce n'est pas un fait établi.**

Kronecker, et le titre de 1874

Leopold Kronecker (1823–1891)

Professeur à Berlin, il n'admettait que les objets constructibles en un nombre fini d'étapes à partir des entiers. On lui prête le mot : « Dieu a fait les nombres entiers ; tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

Une interprétation discutée

Selon J. Dauben, Cantor aurait donné à son article de 1874 un titre modeste, sur les nombres algébriques, sans annoncer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, pour ne pas heurter Kronecker. D'autres historien·nes (J. Ferreirós) insistent sur le rôle de Weierstrass. **Ce n'est pas un fait établi.**

Au XX^e siècle

L. E. J. Brouwer en fait un programme, l'intuitionnisme : on n'y affirme « A ou non A » que si l'on sait lequel des deux est vrai. La preuve de la proposition 6.9 n'y serait pas acceptée.

Montrer un objet (Liouville) ; le construire sans rien en dire (Cantor, 1874) ; prouver qu'il existe sans pouvoir le désigner (proposition 6.9).

Les trois sont des preuves d'existence rigoureuses. **Elles n'apprennent pas la même chose.**

Montrer un objet (Liouville) ; le construire sans rien en dire (Cantor, 1874) ; prouver qu'il existe sans pouvoir le désigner (proposition 6.9).

Les trois sont des preuves d'existence rigoureuses. **Elles n'apprennent pas la même chose.**

Exercice 3 : lequel des deux ?

En une dizaine de lignes : la preuve de la proposition 6.9 nous donne-t-elle un exemple ? Comparez-la à la preuve de l'existence des transcendants. Laquelle des trois manières vous paraît la plus convaincante, et pourquoi ?

PARTIE 5

Une injection dans chaque sens

Séance 2

L'hôtel de Hilbert avait **logé** une infinité de cars pleins, en laissant des chambres vides : une injection des passagers dans les chambres, $(k, n) \mapsto p_k^{n+1}$, et une injection en sens inverse, $n \mapsto (0, n)$.

Nous avons annoncé : une injection dans chaque sens suffit.

Séance 2

L'hôtel de Hilbert avait **logé** une infinité de cars pleins, en laissant des chambres vides : une injection des passagers dans les chambres, $(k, n) \mapsto p_k^{n+1}$, et une injection en sens inverse, $n \mapsto (0, n)$.

Nous avons annoncé : une injection dans chaque sens suffit.

Théorème 6.11 (Cantor-Bernstein)

Soient A et B deux ensembles. S'il existe une application injective de A dans B et une application injective de B dans A , alors il existe une **bijection** de A sur B .

Un théorème à plusieurs noms

- Cantor énonce le résultat, mais sa démonstration repose sur un autre principe, qu'il ne sait pas démontrer.
- Dedekind le démontre en 1887, sans publier : sa preuve paraît en 1932, dans ses œuvres.
- En 1897, Felix Bernstein, 19 ans, étudiant de Cantor à Halle, en trouve une autre ; Émile Borel la publie en 1898.
- La même année, Ernst Schröder publie une preuve, qui se révélera fausse.

Un théorème à plusieurs noms

- Cantor énonce le résultat, mais sa démonstration repose sur un autre principe, qu'il ne sait pas démontrer.
- Dedekind le démontre en 1887, sans publier : sa preuve paraît en 1932, dans ses œuvres.
- En 1897, Felix Bernstein, 19 ans, étudiant de Cantor à Halle, en trouve une autre ; Émile Borel la publie en 1898.
- La même année, Ernst Schröder publie une preuve, qui se révélera fausse.

Loger dans les deux sens, c'est remplir

Si A peut être logé dans B et B dans A , alors A et B ont la même taille. Pour comparer deux ensembles, il suffit de trouver **deux injections**, souvent faciles, au lieu d'une bijection, souvent difficile.

La question 3 du travail

Deux injections

$x \mapsto \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$ envoie $[0, 1]$ dans $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, donc dans $]0, 1[$, et elle est injective.

L'inclusion (chaque x va sur lui-même) envoie $]0, 1[$ dans $[0, 1]$.

La question 3 du travail

Deux injections

$x \mapsto \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$ envoie $[0, 1]$ dans $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, donc dans $]0, 1[$, et elle est injective.

L'inclusion (chaque x va sur lui-même) envoie $]0, 1[$ dans $[0, 1]$.

Par le théorème 6.11, **il existe une bijection de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$.**

La question 3 du travail

Deux injections

$x \mapsto \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$ envoie $[0, 1]$ dans $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, donc dans $]0, 1[$, et elle est injective.

L'inclusion (chaque x va sur lui-même) envoie $]0, 1[$ dans $[0, 1]$.

Par le théorème 6.11, **il existe une bijection de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$.**

En voici une, explicite : l'hôtel de Hilbert caché dans l'intervalle.

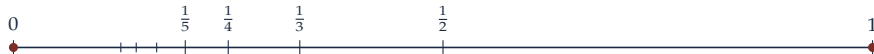
Un hôtel dans l'intervalle

Proposition 6.12

L'application $f : [0, 1] \rightarrow]0, 1[$ définie par

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2} \text{ pour } n \geq 2, \quad f(x) = x \text{ sinon,}$$

est une bijection.



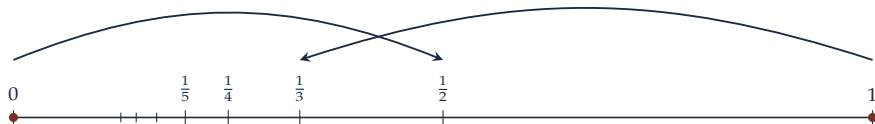
Un hôtel dans l'intervalle

Proposition 6.12

L'application $f : [0, 1] \rightarrow]0, 1[$ définie par

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2} \text{ pour } n \geq 2, \quad f(x) = x \text{ sinon,}$$

est une bijection.



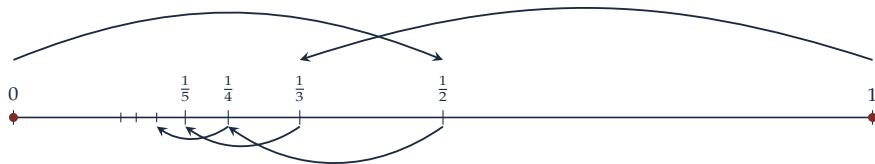
Un hôtel dans l'intervalle

Proposition 6.12

L'application $f : [0, 1] \rightarrow]0, 1[$ définie par

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2} \text{ pour } n \geq 2, \quad f(x) = x \text{ sinon,}$$

est une bijection.



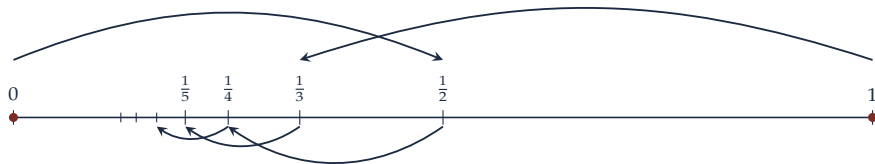
Un hôtel dans l'intervalle

Proposition 6.12

L'application $f : [0, 1] \rightarrow]0, 1[$ définie par

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2} \text{ pour } n \geq 2, \quad f(x) = x \text{ sinon,}$$

est une bijection.



Avec $u_0 = 0, u_1 = 1, u_k = \frac{1}{k}$ ($k \geq 2$) : chaque u_k va sur u_{k+2} , comme à l'hôtel quand arrivent deux nouveaux clients. Les autres réels ne bougent pas.

Exercice 4 : un hôtel dans l'intervalle

- (a) Calculer $f(0), f(1), f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{3}), f(\frac{2}{3})$. Quel est l'antécédent de $\frac{1}{7}$?
- (b) Sur le même modèle, trouver une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1[$ (l'intervalle privé du seul point 1).

Exercice 4 : un hôtel dans l'intervalle

- (a) Calculer $f(0), f(1), f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{3}), f(\frac{2}{3})$. Quel est l'antécédent de $\frac{1}{7}$?
- (b) Sur le même modèle, trouver une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1[$ (l'intervalle privé du seul point 1).

Réponses

- (a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, et $\frac{2}{3}$ ($\frac{2}{3}$ n'est pas de la forme $\frac{1}{n}$). L'antécédent de $\frac{1}{7}$ est $\frac{1}{5}$.
- (b) Un seul nouveau client : $1 \mapsto \frac{1}{2}, \frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 2$, et $x \mapsto x$ sinon.

La droite a la taille d'un segment

Proposition 6.13

Les ensembles $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ et $[0, 1]$ ont deux à deux la même taille.

La droite a la taille d'un segment

Proposition 6.13

Les ensembles $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ et $[0, 1]$ ont deux à deux la même taille.

Démonstration

$g(x) = \frac{2^x}{1 + 2^x}$ envoie $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$, et elle est strictement croissante, donc injective. L'inclusion envoie $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$. Cantor–Bernstein, puis la proposition 6.12 et la transitivité (théorème 2.16). $\square$

La droite a la taille d'un segment

Proposition 6.13

Les ensembles $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ et $[0, 1]$ ont deux à deux la même taille.

Démonstration

$g(x) = \frac{2^x}{1 + 2^x}$ envoie $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$, et elle est strictement croissante, donc injective. L'inclusion envoie $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$. Cantor–Bernstein, puis la proposition 6.12 et la transitivité (théorème 2.16). $\square$

Remarque 6.14

Aucune bijection de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$ n'est *continue* (admis) : le théorème garantit l'existence, pas la « beauté ». Et la droite entière a la taille d'un petit segment : le principe (E) échoue encore.

La démonstration : l'idée

$f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ injectives

On aimerait utiliser g à l'envers : envoyer a sur l'unique b tel que $g(b) = a$.

La démonstration : l'idée

$f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ injectives

On aimerait utiliser g à l'envers : envoyer a sur l'unique b tel que $g(b) = a$.

- Cela marche pour les éléments de A de la forme $g(b)$. Les autres forment un ensemble C_0 : on les envoie par f .

La démonstration : l'idée

$f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ injectives

On aimerait utiliser g à l'envers : envoyer a sur l'unique b tel que $g(b) = a$.

- Cela marche pour les éléments de A de la forme $g(b)$. Les autres forment un ensemble C_0 : on les envoie par f .
- Mais alors les places $f(C_0)$ sont prises, et les éléments $C_1 = g(f(C_0))$, qui auraient voulu y aller à l'envers, doivent aussi être envoyés par f .

La démonstration : l'idée

$f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ injectives

On aimerait utiliser g à l'envers : envoyer a sur l'unique b tel que $g(b) = a$.

- Cela marche pour les éléments de A de la forme $g(b)$. Les autres forment un ensemble C_0 : on les envoie par f .
- Mais alors les places $f(C_0)$ sont prises, et les éléments $C_1 = g(f(C_0))$, qui auraient voulu y aller à l'envers, doivent aussi être envoyés par f .
- Et ainsi de suite : $C_2 = g(f(C_1))$, ...

La démonstration : l'idée

$f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ injectives

On aimerait utiliser g à l'envers : envoyer a sur l'unique b tel que $g(b) = a$.

- Cela marche pour les éléments de A de la forme $g(b)$. Les autres forment un ensemble C_0 : on les envoie par f .
- Mais alors les places $f(C_0)$ sont prises, et les éléments $C_1 = g(f(C_0))$, qui auraient voulu y aller à l'envers, doivent aussi être envoyés par f .
- Et ainsi de suite : $C_2 = g(f(C_1))$, ...

C'est l'hôtel de Hilbert : chacun se décale d'un cran.

La démonstration

Construction

C_0 : les éléments de A qui ne sont pas de la forme $g(b)$; C_{n+1} : les $g(f(a))$ pour $a \in C_n$; C : la réunion des C_n .

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in C, \\ \text{l'unique } b \text{ tel que } g(b) = a & \text{si } a \notin C. \end{cases}$$

La démonstration

Construction

C_0 : les éléments de A qui ne sont pas de la forme $g(b)$; C_{n+1} : les $g(f(a))$ pour $a \in C_n$; C : la réunion des C_n .

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in C, \\ \text{l'unique } b \text{ tel que } g(b) = a & \text{si } a \notin C. \end{cases}$$

Vérification

- **Injective.** Sur C , f est injective ; hors de C , g aussi. Si $a \in C_n$, $a' \notin C$ et $f(a) = h(a')$, alors $a' = g(f(a)) \in C_{n+1}$: contradiction.

La démonstration

Construction

C_0 : les éléments de A qui ne sont pas de la forme $g(b)$; C_{n+1} : les $g(f(a))$ pour $a \in C_n$; C : la réunion des C_n .

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in C, \\ \text{l'unique } b \text{ tel que } g(b) = a & \text{si } a \notin C. \end{cases}$$

Vérification

- **Injective.** Sur C , f est injective ; hors de C , g aussi. Si $a \in C_n$, $a' \notin C$ et $f(a) = h(a')$, alors $a' = g(f(a)) \in C_{n+1}$: contradiction.
- **Surjective.** Soit $b \in B$ et $a = g(b)$. Si $a \notin C$, $h(a) = b$. Sinon $a \in C_n$ avec $n \geq 1$, donc $a = g(f(a'))$ pour un $a' \in C_{n-1}$, et $b = f(a') = h(a')$. $\square$

Sur l'exemple

$A = [0, 1], B =]0, 1[, f(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}, g$ l'inclusion

$$C_0 = \{0, 1\}, C_1 = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}, C_2 = \{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\}, C_3 = \{\frac{7}{16}, \frac{9}{16}\}, \dots$$

$$\text{En général, } C_n = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\}.$$

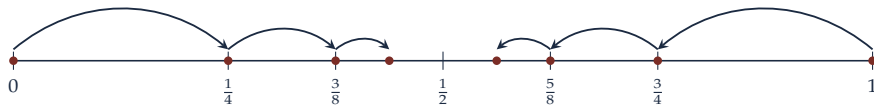


Sur l'exemple

$A = [0, 1], B =]0, 1[, f(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}, g$ l'inclusion

$$C_0 = \{0, 1\}, C_1 = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}, C_2 = \{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\}, C_3 = \{\frac{7}{16}, \frac{9}{16}\}, \dots$$

$$\text{En général, } C_n = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\}.$$

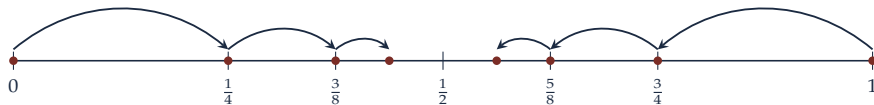


Sur l'exemple

$$A = [0, 1], B =]0, 1[, f(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}, g \text{ l'inclusion}$$

$$C_0 = \{0, 1\}, C_1 = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}, C_2 = \{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\}, C_3 = \{\frac{7}{16}, \frac{9}{16}\}, \dots$$

$$\text{En général, } C_n = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\}.$$



h fait avancer chaque point de C d'un cran vers $\frac{1}{2}$, et laisse les autres réels à leur place.

La preuve a trouvé toute seule un hôtel de Hilbert.

PARTIE 6

Préparer le partiel

Le partiel

Vendredi 6 novembre, 10h-12h, salle F610

Sur les **séances 1 à 6** : la première question du semestre, *comparer sans compter*.

Une **fiche de révision** est distribuée avec les notes : ce qu'il faut savoir, huit exercices, et des éléments de réponse.

Vendredi 6 novembre, 10h-12h, salle F610

Sur les **séances 1 à 6** : la première question du semestre, *comparer sans compter*.

Une **fiche de révision** est distribuée avec les notes : ce qu'il faut savoir, huit exercices, et des éléments de réponse.

La règle des deux publics

Philosophes : vous ne serez jamais évalué·es sur un calcul technique, mais vous devrez savoir *lire* une preuve.

Mathématicien·nes : vous ne serez jamais évalué·es sur une thèse philosophique, mais vous devrez savoir *identifier* une hypothèse implicite.

L'essentiel : séances 1 à 3

Séance 1

Infini en puissance et en acte (Aristote) ; limite (définition 1.1) ; Galilée (proposition 1.5) ; densité (définition 1.6, proposition 1.9) ; **(B)** contre **(E)** (théorème 1.10) ; Dedekind (définition 1.11).

L'essentiel : séances 1 à 3

Séance 1

Infini en puissance et en acte (Aristote) ; limite (définition 1.1) ; Galilée (proposition 1.5) ; densité (définition 1.6, proposition 1.9) ; **(B)** contre **(E)** (théorème 1.10) ; Dedekind (définition 1.11).

Séance 2

Injection, surjection, bijection (définition 2.9) ; $\approx$ est une relation d'équivalence (théorème 2.16) ; trois espèces de paradoxe (définition 2.18) ; Zénon (proposition 2.19) ; le barbier (proposition 2.20) ; l'hôtel : loger, remplir.

L'essentiel : séances 1 à 3

Séance 1

Infini en puissance et en acte (Aristote) ; limite (définition 1.1) ; Galilée (proposition 1.5) ; densité (définition 1.6, proposition 1.9) ; **(B)** contre **(E)** (théorème 1.10) ; Dedekind (définition 1.11).

Séance 2

Injection, surjection, bijection (définition 2.9) ; $\approx$ est une relation d'équivalence (théorème 2.16) ; trois espèces de paradoxe (définition 2.18) ; Zénon (proposition 2.19) ; le barbier (proposition 2.20) ; l'hôtel : loger, remplir.

Séance 3

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ (proposition 3.1) ; dénombrable (définition 3.3) ; parties de $\mathbb{N}$ (proposition 3.6) ; le critère (proposition 3.7).

L'essentiel : séances 4 à 6

Séance 4

Couplage de Cantor (théorème 4.2); $\mathbb{Q}$ (théorème 4.7); mots finis (proposition 4.10); nombres algébriques (théorème 4.13).

L'essentiel : séances 4 à 6

Séance 4

Couplage de Cantor (théorème 4.2); $\mathbb{Q}$ (théorème 4.7); mots finis (proposition 4.10); nombres algébriques (théorème 4.13).

Séance 5

Écriture décimale, $0,999\dots = 1$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; intervalles emboîtés; théorème de 1874 (théorème 5.9); $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable; transcendants.

L'essentiel : séances 4 à 6

Séance 4

Couplage de Cantor (théorème 4.2); $\mathbb{Q}$ (théorème 4.7); mots finis (proposition 4.10); nombres algébriques (théorème 4.13).

Séance 5

Écriture décimale, $0,999\dots = 1$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; intervalles emboîtés; théorème de 1874 (théorème 5.9); $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable; transcendants.

Séance 6

La diagonale (théorèmes 6.4 et 6.8); trois manières d'exister; Cantor–Bernstein (théorème 6.11) et ses usages.

Où est l'erreur ? (1)

(a)

« $\mathbb{N}$ est une partie stricte de $\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z}$ a strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$. »

Où est l'erreur ? (1)

(a)

« $\mathbb{N}$ est une partie stricte de $\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z}$ a strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$. »

Le raisonnement utilise le principe **(E)**, faux pour les ensembles infinis (théorème 1.10) : $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ (proposition 3.1).

Où est l'erreur ? (1)

(a)

« $\mathbb{N}$ est une partie stricte de $\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z}$ a strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$. »

Le raisonnement utilise le principe (E), faux pour les ensembles infinis (théorème 1.10) : $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ (proposition 3.1).

(b)

« Voici une liste de tous les réels de $]0,1[$: 0,1 ; 0,2 ; ... ; 0,9 ; puis 0,01 ; ... ; 0,99 ; puis les nombres à trois décimales, etc. Donc $]0,1[$ est dénombrable. »

Où est l'erreur ? (1)

(a)

« $\mathbb{N}$ est une partie stricte de $\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z}$ a strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$. »

Le raisonnement utilise le principe **(E)**, faux pour les ensembles infinis (théorème 1.10) : $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ (proposition 3.1).

(b)

« Voici une liste de tous les réels de $]0,1[$: 0,1 ; 0,2 ; ... ; 0,9 ; puis 0,01 ; ... ; 0,99 ; puis les nombres à trois décimales, etc. Donc $]0,1[$ est dénombrable. »

La liste ne contient que les écritures **finies** : $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$ n'y figure jamais.

Où est l'erreur ? (2)

(c)

«0,999 ... est un peu plus petit que 1, puisque chaque troncature est < 1 .»

Où est l'erreur ? (2)

(c)

«0,999 ... est un peu plus petit que 1, puisque chaque troncature est < 1 .»

Ce sont les troncatures qui sont < 1 . L'écriture infinie désigne leur **limite**, qui est 1 (proposition 5.4).

Où est l'erreur ? (2)

(c)

«0,999 ... est un peu plus petit que 1, puisque chaque troncature est < 1 .»

Ce sont les troncatures qui sont < 1 . L'écriture infinie désigne leur **limite**, qui est 1 (proposition 5.4).

(d)

«Dans la preuve de 1874, on pourrait couper chaque intervalle en deux moitiés au lieu de trois tiers.»

Où est l'erreur ? (2)

(c)

« 0,999 ... est un peu plus petit que 1, puisque chaque troncature est < 1 . »

Ce sont les troncatures qui sont < 1 . L'écriture infinie désigne leur **limite**, qui est 1 (proposition 5.4).

(d)

« Dans la preuve de 1874, on pourrait couper chaque intervalle en deux moitiés au lieu de trois tiers. »

Non : x_n peut être le milieu, dans les **deux** moitiés fermées. Avec trois tiers, il est dans au plus deux, et l'un reste libre.

PARTIE 7

Pour le 6 et le 13 novembre

Travail pour le 6 et le 13 novembre

1. **Relire** les notes des séances 1 à 6.
2. **Préparer le partiel** avec la fiche de révision : chercher les huit exercices *avant* de lire les éléments de réponse.
3. **Pour le 13 novembre, une question à méditer, sans rien rédiger.**

Travail pour le 6 et le 13 novembre

1. **Relire** les notes des séances 1 à 6.
2. **Préparer le partiel** avec la fiche de révision : chercher les huit exercices *avant* de lire les éléments de réponse.
3. **Pour le 13 novembre, une question à méditer, sans rien rédiger.**

Un carré a-t-il plus de points que l'un de ses côtés ?

6 NOVEMBRE : PARTIEL

13 NOVEMBRE

Un carré a-t-il plus de points qu'un côté?
