

QU'EST-CE QUE L'INFINI? · SÉANCE 5

Le car des réels

Cantor, 1873–1874

Université Paris 1 — Panthéon-Sorbonne

PARTIE 1

La question de 1873

La question de 1873

Ce matin : 29 et 30 novembre 1873

Cantor demande à Dedekind : peut-on mettre en correspondance un-à-un les entiers naturels et les nombres réels ? Dedekind ne sait pas répondre, mais il démontre que les nombres **algébriques**, eux, peuvent être numérotés.

La question de 1873

Ce matin : 29 et 30 novembre 1873

Cantor demande à Dedekind : peut-on mettre en correspondance un-à-un les entiers naturels et les nombres réels ? Dedekind ne sait pas répondre, mais il démontre que les nombres **algébriques**, eux, peuvent être numérotés.

7 et 8 décembre

Cantor envoie une démonstration que les réels **ne le peuvent pas**. Dedekind la simplifie dès le lendemain.

La question de 1873

Ce matin : 29 et 30 novembre 1873

Cantor demande à Dedekind : peut-on mettre en correspondance un-à-un les entiers naturels et les nombres réels ? Dedekind ne sait pas répondre, mais il démontre que les nombres **algébriques**, eux, peuvent être numérotés.

7 et 8 décembre

Cantor envoie une démonstration que les réels **ne le peuvent pas**. Dedekind la simplifie dès le lendemain.

1874

L'article « Sur une propriété de l'ensemble de tous les nombres algébriques réels » réunit les deux résultats. Dedekind notera que ses deux contributions y figurent presque mot pour mot, sans son nom.

C'est la seconde moitié de cet article que nous démontrons maintenant.

PARTIE 2

Écrire un réel

Définition

Une **écriture décimale** de $x \in [0, 1]$ est une suite de chiffres $c_1, c_2, c_3, \dots$ telle que x soit la **limite** des troncatures

$$0, c_1, \quad 0, c_1 c_2, \quad 0, c_1 c_2 c_3, \quad \dots$$

On écrit $x = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$

Définition

Une **écriture décimale** de $x \in [0, 1]$ est une suite de chiffres $c_1, c_2, c_3, \dots$ telle que x soit la **limite** des troncatures

$$0, c_1, \quad 0, c_1 c_2, \quad 0, c_1 c_2 c_3, \quad \dots$$

On écrit $x = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$

Une écriture infinie ne désigne pas un processus sans fin, mais un **nombre** : la limite. C'est le geste d'Achille : une infinité d'étapes, un résultat fini.

Un rationnel : $\frac{1}{7}$

$$\frac{1}{7} = 0,142857\ 142857\ 142857\ldots$$

Dans la division de 1 par 7, les restes successifs sont

1, 3, 2, 6, 4, 5, puis de nouveau 1.

Tout recommence : les chiffres se répètent par blocs de six.

Un rationnel : $\frac{1}{7}$

$$\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\,142857\ldots$$

Dans la division de 1 par 7, les restes successifs sont

1, 3, 2, 6, 4, 5, puis de nouveau 1.

Tout recommence : les chiffres se répètent par blocs de six.

En général

Dans la division par q , il n'y a que $q - 1$ restes non nuls possibles : l'écriture décimale d'un rationnel finit toujours par être **périodique**.

$$0,999 \dots = 1$$

Les troncatures

$$0, \underbrace{9 \dots 9}_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Le même calcul que la somme de Zénon. Donc $0,999 \dots$ désigne le nombre 1.

$$0,999 \dots = 1$$

Les troncatures

$$0,\underbrace{9 \dots 9}_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Le même calcul que la somme de Zénon. Donc $0,999 \dots$ désigne le nombre 1.

Un réel peut avoir deux écritures

$$0,25 = 0,24999 \dots \quad 0,5 = 0,4999 \dots$$

Exercice 1 : deux écritures

- (a) Écrire $\frac{1}{4}$ de deux façons.
- (b) Quels réels de $[0, 1]$ ont deux écritures décimales ?

Exercice 1 : deux écritures

- (a) Écrire $\frac{1}{4}$ de deux façons.
- (b) Quels réels de $[0, 1]$ ont deux écritures décimales ?

Réponses

- (a) $\frac{1}{4} = 0,25 = 0,24999 \dots$
- (b) Les réels de $]0, 1[$ qui ont une écriture **finie**, de la forme $\frac{m}{10^k}$: on remplace le dernier chiffre non nul c par $c - 1$, suivi d'une infinité de 9.

PARTIE 3

Le raisonnement par l'absurde

Par l'absurde

Le principe

Pour démontrer qu'un énoncé est vrai, on suppose qu'il est faux, et l'on en tire une **contradiction**.

Par l'absurde

Le principe

Pour démontrer qu'un énoncé est vrai, on suppose qu'il est faux, et l'on en tire une **contradiction**.

Nous l'avons déjà fait

Le barbier de la séance 2 n'existe pas : son existence mènerait à une contradiction.

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Proposition

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Proposition

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration

- Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, la fraction irréductible.

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Proposition

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration

- Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, la fraction irréductible.
- Alors $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p aussi, $p = 2p'$.

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Proposition

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration

- Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, la fraction irréductible.
- Alors $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p aussi, $p = 2p'$.
- Il vient $q^2 = 2p'^2$: q est pair aussi.

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Proposition

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration

- Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, la fraction irréductible.
- Alors $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p aussi, $p = 2p'$.
- Il vient $q^2 = 2p'^2$: q est pair aussi.
- Alors 2 divise p et q : la fraction n'était pas irréductible. **Contradiction.**



PARTIE 4

Les intervalles emboîtés

Intervalles emboîtés

Vocabulaire

$[a, b]$: l'intervalle **fermé** des x tels que $a \leq x \leq b$; sa **longueur** est $b - a$.

Une suite $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ est **emboîtée**.

Intervalles emboîtés

Vocabulaire

$[a, b]$: l'intervalle **fermé** des x tels que $a \leq x \leq b$; sa **longueur** est $b - a$.

Une suite $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ est **emboîtée**.

Principe des intervalles emboîtés

Si $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ sont **fermés** et **bornés**, un réel appartient à *tous* les I_n .

Si de plus les longueurs tendent vers 0, ce réel est **unique**.

Les deux hypothèses

intervalles	intersection	ce qui manque
$[0, \frac{1}{n}], n \geq 1$	$\{0\}$	—

Les deux hypothèses

intervalles	intersection	ce qui manque
$[0, \frac{1}{n}], n \geq 1$	$\{0\}$	—
$]0, \frac{1}{n}[, n \geq 1$	$\emptyset$	fermés

Les deux hypothèses

intervalles	intersection	ce qui manque
$[0, \frac{1}{n}], n \geq 1$	$\{0\}$	—
$]0, \frac{1}{n}[, n \geq 1$	$\emptyset$	fermés
$[n, +\infty[, n \geq 0$	$\emptyset$	bornés

Dans $\mathbb{Q}$, des trous

Des intervalles à extrémités rationnelles

$$[1, 2] \supseteq [1,4; 1,5] \supseteq [1,41; 1,42] \supseteq [1,414; 1,415] \supseteq \dots$$

bornés par les troncatures de $\sqrt{2}$.

Dans $\mathbb{Q}$, des trous

Des intervalles à extrémités rationnelles

$$[1, 2] \supseteq [1,4; 1,5] \supseteq [1,41; 1,42] \supseteq [1,414; 1,415] \supseteq \dots$$

bornés par les troncatures de $\sqrt{2}$.

Le seul réel commun à tous est $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnel : **dans $\mathbb{Q}$, l'intersection est vide.**

La droite des rationnels a des trous; la droite réelle n'en a pas.

Exercice 2 : emboîtés ou non

Emboîtée ? Intersection ? Quelle hypothèse manque ? ($n \geq 1$)

- (a) $[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ (b) $]0, \frac{1}{n}]$ (c) $[0, 1 + \frac{1}{n}]$ (d) $[n, n + 1]$

Exercice 2 : emboîtés ou non

Emboîtée ? Intersection ? Quelle hypothèse manque ? ($n \geq 1$)

(a) $[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ (b) $]0, \frac{1}{n}]$ (c) $[0, 1 + \frac{1}{n}]$ (d) $[n, n + 1]$

Réponses

(a) emboîtée, $\{1\}$ (b) emboîtée, $\emptyset$: pas fermés (c) emboîtée, $[0, 1]$: les longueurs ne tendent pas vers 0 (d) non emboîtée, $\emptyset$

PARTIE 5

Le car des réels

Séance 2 : arrive un car avec un passager pour chaque nombre réel

L'hôtel peut-il les loger ?

Séance 2 : arrive un car avec un passager pour chaque nombre réel

L'hôtel peut-il les loger ?

Il le pourrait s'il existait une liste $x_0, x_1, x_2, \dots$ dans laquelle figure **chaque** réel.

Le théorème

Théorème (Cantor, 1874)

Soit $x_0, x_1, x_2, \dots$ une suite **quelconque** de réels, et $[a, b]$ un intervalle avec $a < b$.
Il existe un réel $c \in [a, b]$ qui n'est **aucun** des x_n .

Le théorème

Théorème (Cantor, 1874)

Soit $x_0, x_1, x_2, \dots$ une suite **quelconque** de réels, et $[a, b]$ un intervalle avec $a < b$.
Il existe un réel $c \in [a, b]$ qui n'est **aucun** des x_n .

L'idée

Exclure les x_n un par un, chacun à son tour, en rétrécissant un intervalle — puis garder ce qui reste.

La preuve : couper en trois

Construction

■ $I_0 = [a, b]$.

La preuve : couper en trois

Construction

- $I_0 = [a, b]$.
- I_n étant construit, on le coupe en trois intervalles fermés de même longueur. x_n est dans **au plus deux** d'entre eux.

La preuve : couper en trois

Construction

- $I_0 = [a, b]$.
- I_n étant construit, on le coupe en trois intervalles fermés de même longueur. x_n est dans **au plus deux** d'entre eux.
- I_{n+1} : le premier, en partant de la gauche, qui ne contient **pas** x_n .

La preuve : couper en trois

Construction

- $I_0 = [a, b]$.
- I_n étant construit, on le coupe en trois intervalles fermés de même longueur. x_n est dans **au plus deux** d'entre eux.
- I_{n+1} : le premier, en partant de la gauche, qui ne contient **pas** x_n .

Conclusion

Les I_n sont fermés, bornés, emboîtés, de longueur $\frac{b-a}{3^n} \rightarrow 0$: un réel c est dans tous.
Pour chaque n : $c \in I_{n+1}$ et $x_n \notin I_{n+1}$, donc $c \neq x_n$.



Le dessin



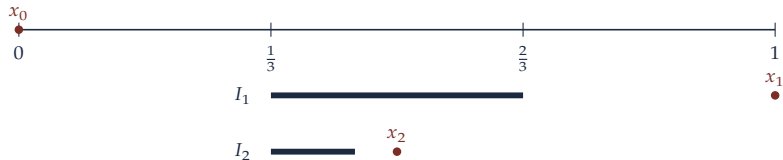
Dans $[0, 1]$, avec la liste $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots$

Le dessin



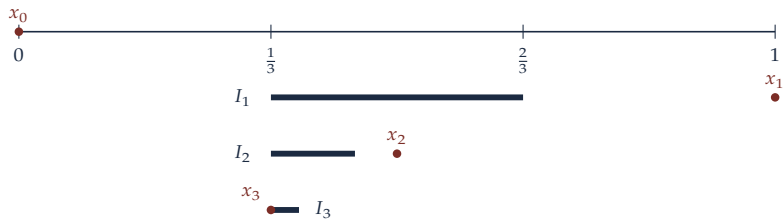
Dans $[0, 1]$, avec la liste $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots$

Le dessin



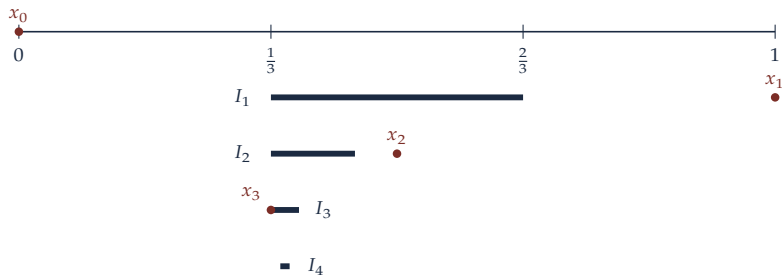
Dans $[0, 1]$, avec la liste $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots$

Le dessin



Dans $[0, 1]$, avec la liste $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots$

Le dessin



Dans $[0, 1]$, avec la liste $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots$

Exercice 3 : la preuve à la main

Dans $[0, 1]$, avec la liste $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = \frac{2}{3}, \dots$: calculer I_1, I_2, I_3, I_4 .
Que remarquez-vous au sujet de $\frac{1}{3}$?

Exercice 3 : la preuve à la main

Dans $[0, 1]$, avec la liste $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = \frac{2}{3}, \dots$: calculer I_1, I_2, I_3, I_4 .
Que remarquez-vous au sujet de $\frac{1}{3}$?

Réponses

$$I_1 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \quad I_2 = [\frac{1}{3}, \frac{4}{9}], \quad I_3 = [\frac{1}{3}, \frac{10}{27}], \quad I_4 = [\frac{28}{81}, \frac{29}{81}].$$

$\frac{1}{3}$ reste dans tous les intervalles **jusqu'à ce que vienne son tour** : alors il est exclu.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Proposition

Aucun intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ n'est dénombrable. En particulier, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Proposition

Aucun intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ n'est dénombrable. En particulier, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Une liste $x_0, x_1, \dots$ de tous les éléments de $[a, b]$ en oublierait un : le c du théorème. Contradiction.

Et si $\mathbb{R}$ était dénombrable, sa partie infinie $[a, b]$ le serait aussi.

L'hôtel de Hilbert **ne peut pas** loger le car des réels.

L'hôtel de Hilbert **ne peut pas** loger le car des réels.

Quelle que soit la manière de distribuer les chambres, un passager au moins reste dehors.

Il y a donc **deux tailles d'infini** : celle de $\mathbb{N}$, et une taille strictement plus grande, celle de $\mathbb{R}$.

Il existe des nombres transcendants

Proposition (Cantor, 1874)

Il existe des nombres transcendants, et même dans tout intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

Il existe des nombres transcendants

Proposition (Cantor, 1874)

Il existe des nombres transcendants, et même dans tout intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

Démonstration

Rangeons les nombres algébriques en une liste $x_0, x_1, x_2, \dots$ (ce matin). Le théorème fournit un $c \in [a, b]$ qui n'est aucun des x_n : **il n'est pas algébrique.** $\square$

Une existence sans exemple ?

La preuve *construit* c , étape par étape, à partir de la liste. Mais on ne l'écrit jamais, et l'argument ne dit rien de lui, sinon qu'il n'est pas algébrique.

Une existence sans exemple ?

La preuve *construit* c , étape par étape, à partir de la liste. Mais on ne l'écrit jamais, et l'argument ne dit rien de lui, sinon qu'il n'est pas algébrique.

Deux manières de savoir

Liouville (1844) étudie des nombres particuliers, un par un.

Cantor (1874) compte : il y a « trop » de réels pour qu'ils soient tous algébriques.

Exercice 4 : exister sans être montré

En une dizaine de lignes

La proposition prouve qu'il existe des nombres transcendants sans en écrire aucun. Est-ce, à vos yeux, une preuve d'existence aussi bonne qu'un exemple ? Qu'est-ce qu'elle nous apprend de plus, ou de moins, qu'un exemple ?

Exercice 4 : exister sans être montré

En une dizaine de lignes

La proposition prouve qu'il existe des nombres transcendants sans en écrire aucun. Est-ce, à vos yeux, une preuve d'existence aussi bonne qu'un exemple ? Qu'est-ce qu'elle nous apprend de plus, ou de moins, qu'un exemple ?

Points attendus

La preuve est rigoureuse, et même constructive à partir de la liste ; mais elle ne dit pas *quel* nombre est transcendant. Elle apprend que presque tous les réels, au sens de la taille, le sont ; un exemple apprend qu'*un* nombre précis l'est.

PARTIE 6

Pour le 23 octobre

Deux tailles d'infini

Il y a donc **deux tailles d'infini**.

La semaine prochaine : une seconde preuve, sans intervalles — et la réponse à la question de l'hôtel : une injection dans chaque sens suffit-elle ?

Travail pour le 23 octobre

1. **Relire** les notes des séances 3 à 5.
2. **Parties finies de $\mathbb{N}$.** Montrer que $A \mapsto \sum_{a \in A} 2^a$ est une bijection des parties finies de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ ($\{0, 2, 3\} \mapsto 13$). *Indication* : la base 2.
3. **Deux injections.** Trouver une injection de $[0, 1]$ dans $]0, 1[$, et une de $]0, 1[$ dans $[0, 1]$. Existe-t-il, selon vous, une bijection entre les deux ?
4. *Facultatif.* Écrire en base 2 : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, puis $\frac{1}{3}$.

23 OCTOBRE

La diagonale, et Cantor-Bernstein
