

QU'EST-CE QUE L'INFINI? · SÉANCE 4

L'infini dénombrable (suite)

Fractions, mots, nombres algébriques

Université Paris 1 — Panthéon-Sorbonne

PARTIE 1

Couples et fractions

Couples

Le produit $A \times B$

L'ensemble des **couples** (a, b) , avec $a \in A$ et $b \in B$.

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Couples

Le produit $A \times B$

L'ensemble des **couples** (a, b) , avec $a \in A$ et $b \in B$.

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Un couple est ordonné

$(1, 2) \neq (2, 1)$, alors que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: un quadrillage, infini dans les deux directions. Le couple (m, n) est en colonne m , ligne n .

Parcourir le quadrillage

Ligne par ligne ?

On ne finirait jamais la première ligne : le point $(0, 1)$ n'aurait **jamais** de numéro.

Parcourir le quadrillage

Ligne par ligne ?

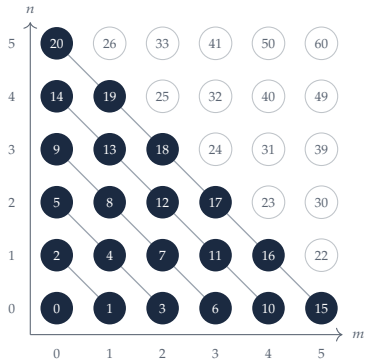
On ne finirait jamais la première ligne : le point $(0, 1)$ n'aurait **jamais** de numéro.

L'idée de Cantor : par diagonales

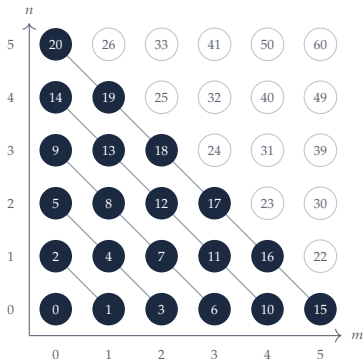
D'abord le point de somme 0 ; puis les deux points de somme 1 ; puis les trois points de somme 2 ; et ainsi de suite.

Chaque diagonale est finie : on la termine, et l'on passe à la suivante.

Les diagonales



Les diagonales



Le calcul

La diagonale d contient $d + 1$ points. Avant elle :

$$T_d = 1 + 2 + \dots + d = \frac{d(d+1)}{2}$$

points — les **nombre**s **triangulaires**
0, 1, 3, 6, 10, ...

Les diagonales



Le calcul

La diagonale d contient $d + 1$ points. Avant elle :

$$T_d = 1 + 2 + \dots + d = \frac{d(d+1)}{2}$$

points — les **nombre**s **triangulaires**
 $0, 1, 3, 6, 10, \dots$

Théorème

$$\pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

est une bijection $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Exercice 1 : le couplage

- (a) Calculer $\pi(2, 3)$, $\pi(4, 0)$, $\pi(0, 4)$.
- (b) Quel couple porte le numéro 12 ? Le numéro 20 ?

Exercice 1 : le couplage

- (a) Calculer $\pi(2,3)$, $\pi(4,0)$, $\pi(0,4)$.
- (b) Quel couple porte le numéro 12 ? Le numéro 20 ?

Réponses

- (a) $\pi(2,3) = \frac{5 \times 6}{2} + 3 = 18$; $\pi(4,0) = 10$; $\pi(0,4) = 14$.
- (b) $T_4 = 10 \leq 12 < 15$: diagonale 4, $n = 2$: $(2,2)$. $T_5 = 15 \leq 20 < 21$: $(0,5)$.

Exercice 1 : le couplage

- (a) Calculer $\pi(2,3)$, $\pi(4,0)$, $\pi(0,4)$.
- (b) Quel couple porte le numéro 12? Le numéro 20?

Réponses

- (a) $\pi(2,3) = \frac{5 \times 6}{2} + 3 = 18$; $\pi(4,0) = 10$; $\pi(0,4) = 14$.
- (b) $T_4 = 10 \leq 12 < 15$: diagonale 4, $n = 2$: $(2,2)$. $T_5 = 15 \leq 20 < 21$: $(0,5)$.

Deux bijections

L'hôtel et Cantor coïncident au début, puis se séparent : $2^1(2 \cdot 1 + 1) - 1 = 5$, mais $\pi(1,1) = 4$. Aucune n'est « la bonne ».

Des produits plus grands

Proposition

Si A et B sont dénombrables, $A \times B$ l'est. Pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.

Des produits plus grands

Proposition

Si A et B sont dénombrables, $A \times B$ l'est. Pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.

$\mathbb{N}^3 \approx \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, puis $\mathbb{N}^4$, et ainsi de suite.

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: les points du plan à coordonnées entières. Il n'y en a pas plus que d'entiers naturels.

Combien y a-t-il de fractions ?

Il y en a déjà une infinité entre 0 et 1 : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Entre deux fractions $a < b$, il y en a toujours une autre : $\frac{a+b}{2}$. On dit que $\mathbb{Q}$ est **dense**.

Entre 3 et 4, il n'y a aucun entier.

Combien y a-t-il de fractions ?

Il y en a déjà une infinité entre 0 et 1 : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Entre deux fractions $a < b$, il y en a toujours une autre : $\frac{a+b}{2}$. On dit que $\mathbb{Q}$ est **dense**.

Entre 3 et 4, il n'y a aucun entier.

Plus de fractions que d'entiers ? Votez.

Le tableau des fractions

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
$q = 1$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
$q = 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$q = 3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$q = 4$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$q = 5$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$

Le tableau des fractions

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
$q = 1$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
$q = 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$q = 3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$q = 4$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$q = 5$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$

Par hauteur $p + q$

Chaque hauteur ne contient qu'un nombre fini de fractions.

On **saute** les formes non irréductibles (en gris) : $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$.

Le tableau des fractions

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
$q = 1$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
$q = 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$q = 3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$q = 4$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$q = 5$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$

Par hauteur $p + q$

Chaque hauteur ne contient qu'un nombre fini de fractions.

On **saute** les formes non irréductibles (en gris) : $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$.

Toutes les fractions

Alterner comme pour $\mathbb{Z}$: $0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$

$\mathbb{Q}$ est dénombrable

Théorème

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.

$\mathbb{Q}$ est dénombrable

Théorème

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.

Une seconde preuve, sans dessin

Tout rationnel s'écrit d'une seule façon $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$ et la fraction irréductible.

$\frac{p}{q} \mapsto (p, q)$ est une **injection** de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, qui est dénombrable.

$\mathbb{Q}$ est infini : il est dénombrable (la méthode).

Dense, et pourtant dénombrable

Comment est-ce possible ?

La liste **ne suit pas l'ordre** des fractions : elle va de $\frac{1}{1}$ à $\frac{1}{2}$, revient à $\frac{2}{1}$, repart vers $\frac{1}{3}$...
Dans l'ordre de la droite, pas de « fraction suivante ». Dans l'ordre de la liste, il y en a toujours une.

Dense, et pourtant dénombrable

Comment est-ce possible ?

La liste **ne suit pas l'ordre** des fractions : elle va de $\frac{1}{1}$ à $\frac{1}{2}$, revient à $\frac{2}{1}$, repart vers $\frac{1}{3}$...
Dans l'ordre de la droite, pas de « fraction suivante ». Dans l'ordre de la liste, il y en a toujours une.

À retenir

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$, et $\mathbb{Q}$ est dense ; pourtant $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$.

Il n'y a pas plus de fractions que d'entiers. La densité est une propriété de l'**ordre**, non de la **taille**.

Exercice 3 : ce que l'intuition mesurait

À discuter

Galilée concluait que « égal », « plus grand », « plus petit » n'ont pas de sens pour l'infini. Qu'est-ce qui, dans notre intuition, nous faisait croire qu'il y a « plus » de fractions ? Est-ce une propriété de taille ?

Galilée avait-il raison, finalement ?

Exercice 3 : ce que l'intuition mesurait

À discuter

Galilée concluait que « égal », « plus grand », « plus petit » n'ont pas de sens pour l'infini. Qu'est-ce qui, dans notre intuition, nous faisait croire qu'il y a « plus » de fractions ? Est-ce une propriété de taille ?

Galilée avait-il raison, finalement ?

Deux choses qui ne sont pas la taille

L'**inclusion** — le principe (E) ; la **densité** — une propriété de l'ordre.

PARTIE 2

Mots et nombres algébriques

Les mots finis

Définitions

Un **alphabet** Σ : un ensemble fini non vide de lettres. Un **mot** : une suite finie de lettres (le mot vide compris). Σ^* : l'ensemble des mots.

Les mots finis

Définitions

Un **alphabet** Σ : un ensemble fini non vide de lettres. Un **mot** : une suite finie de lettres (le mot vide compris). Σ^* : l'ensemble des mots.

Proposition

Pour tout alphabet Σ , l'ensemble Σ^* est dénombrable.

numéro	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
mot	(vide)	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>aa</i>	<i>ab</i>	<i>ba</i>	<i>bb</i>	<i>aaa</i>	<i>aab</i>	<i>aba</i>	...

Par **longueur**, puis dans l'ordre du dictionnaire : il y a s^ℓ mots de longueur ℓ — un nombre fini.

Pourquoi pas le dictionnaire ?

L'ordre du dictionnaire seul

$a, aa, aaa, aaaa, \dots$ viennent tous avant b : le mot b n'aurait **jamais** de numéro.

Pourquoi pas le dictionnaire ?

L'ordre du dictionnaire seul

a , aa , aaa , $aaaa$, ... viennent tous avant b : le mot b n'aurait **jamais** de numéro.

C'est l'erreur du quadrillage parcouru ligne par ligne. Ranger d'abord par longueur, c'est découper en **tranches finies** — comme les diagonales de Cantor.

Ce que l'on peut écrire

Tous les textes qu'on peut écrire — toutes les phrases, toutes les définitions, toutes les démonstrations, dans toutes les langues qui ont un alphabet fini — forment un ensemble **dénombrable**.

Ce que l'on peut écrire

Tous les textes qu'on peut écrire — toutes les phrases, toutes les définitions, toutes les démonstrations, dans toutes les langues qui ont un alphabet fini — forment un ensemble **dénombrable**.

C'est l'argument de Berry, étendu à toutes les longueurs à la fois.
Y a-t-il des objets mathématiques plus nombreux que les textes ?

Les nombres algébriques

Définition

Un réel α est **algébrique** s'il est racine d'un polynôme **non nul** à coefficients entiers :

$$c_d \alpha^d + \cdots + c_1 \alpha + c_0 = 0, \quad c_0, \dots, c_d \in \mathbb{Z} \text{ non tous nuls.}$$

Sinon, il est **transcendant**.

Les nombres algébriques

Définition

Un réel α est **algébrique** s'il est racine d'un polynôme **non nul** à coefficients entiers :

$$c_d \alpha^d + \cdots + c_1 \alpha + c_0 = 0, \quad c_0, \dots, c_d \in \mathbb{Z} \text{ non tous nuls.}$$

Sinon, il est **transcendant**.

Exemples

$\frac{p}{q}$ (racine de $qx - p$); $\sqrt{2}$ ($x^2 - 2$); $\sqrt[3]{2}$ ($x^3 - 2$); $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($x^2 - x - 1$).

Transcendants : e (Hermite, 1873), π (Lindemann, 1882).

Les nombres algébriques

Définition

Un réel α est **algébrique** s'il est racine d'un polynôme **non nul** à coefficients entiers :

$$c_d \alpha^d + \cdots + c_1 \alpha + c_0 = 0, \quad c_0, \dots, c_d \in \mathbb{Z} \text{ non tous nuls.}$$

Sinon, il est **transcendant**.

Exemples

$\frac{p}{q}$ (racine de $qx - p$); $\sqrt{2}$ ($x^2 - 2$); $\sqrt[3]{2}$ ($x^3 - 2$); $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($x^2 - x - 1$).

Transcendants : e (Hermite, 1873), π (Lindemann, 1882).

Un seul fait sur les polynômes

Un polynôme non nul de degré d a **au plus** d racines.

Théorème

L'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable.

Théorème

L'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable.

Les polynômes sont des mots

Alphabet $\{0, 1, \dots, 9, x, ^, +, -\}$: $3x^2 - 5x + 1$ s'écrit $3x^2-5x+1$. Liste des mots : $w_0, w_1, w_2, \dots$

Théorème

L'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable.

Les polynômes sont des mots

Alphabet $\{0, 1, \dots, 9, x, ^, +, -\}$: $3x^2 - 5x + 1$ s'écrit $3x^2-5x+1$. Liste des mots : $w_0, w_1, w_2, \dots$

Un numéro pour chaque nombre algébrique α

$i(\alpha)$: le **plus petit** i tel que w_i écrive un polynôme non nul dont α est racine.

$j(\alpha)$: le rang de α parmi les racines de ce polynôme, **dans l'ordre croissant**.

$\alpha \mapsto (i(\alpha), j(\alpha))$ est une injection dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; l'ensemble est infini (il contient $\mathbb{Q}$).

Une réunion d'ensembles dénombrables

On voudrait dire : *une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable* — énumérer chacun, puis parcourir les couples avec les diagonales.

Une réunion d'ensembles dénombrables

On voudrait dire : *une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable* — énumérer chacun, puis parcourir les couples avec les diagonales.

Mais il faut **choisir** une énumération de chacun : une infinité de choix, sans règle. Pour les nombres algébriques, il y avait une règle — le plus petit numéro, l'ordre croissant. Dans le cas général, ce pas repose sur un principe que nous nommerons **en dénombre**.

Cantor et Dedekind, 1873

29 novembre 1873

Cantor écrit à Dedekind : peut-on mettre en correspondance un-à-un les entiers naturels et les nombres réels ? Il ne sait pas répondre.

Cantor et Dedekind, 1873

29 novembre 1873

Cantor écrit à Dedekind : peut-on mettre en correspondance un-à-un les entiers naturels et les nombres réels ? Il ne sait pas répondre.

30 novembre : la réponse de Dedekind

Il ne sait pas non plus — mais il démontre que les nombres **algébriques**, eux, peuvent être numérotés : c'est la preuve que nous venons de voir.

Cantor et Dedekind, 1873

29 novembre 1873

Cantor écrit à Dedekind : peut-on mettre en correspondance un-à-un les entiers naturels et les nombres réels ? Il ne sait pas répondre.

30 novembre : la réponse de Dedekind

Il ne sait pas non plus — mais il démontre que les nombres **algébriques**, eux, peuvent être numérotés : c'est la preuve que nous venons de voir.

Et les réels ?

Réponse cet après-midi — **16 h, salle G607.**

PARTIE 3

Pour cet après-midi

Ce que nous savons compter

Tous dénombrables

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$, $\mathbb{Q}$, les mots, les textes, les nombres algébriques.

Ce que nous savons compter

Tous dénombrables

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$, $\mathbb{Q}$, les mots, les textes, les nombres algébriques.

Arrive un car avec un passager pour chaque nombre réel

L'hôtel peut-il les loger ?

Gardez votre vote. Réponse cet après-midi, 16 h, salle G607.

SÉANCE 5 — CET APRÈS-MIDI

Le car des réels

16 h, salle G607