

QU'EST-CE QUE L'INFINI? · SÉANCE 3

L'infini dénombrable

Dénombrer, c'est lister

Université Paris 1 — Panthéon-Sorbonne

PARTIE 1

Retour sur le travail

Séance 2

- **Loger** tout le monde, c'est une **injection** ; **remplir** l'hôtel, c'est une **bijection**.
- Une infinité de cars, chacun plein : logés par les nombres premiers — mais des chambres restaient vides.

Séance 2

- **Loger** tout le monde, c'est une **injection** ; **remplir** l'hôtel, c'est une **bijection**.
- Une infinité de cars, chacun plein : logés par les nombres premiers — mais des chambres restaient vides.

Aujourd'hui

Donner un nom aux ensembles qu'on peut faire défiler comme les chambres de l'hôtel — et voir jusqu'où ce nom s'étend.

Question 2 : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Alterner

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$z(n)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	...

$z(n) = n/2$ si n est pair, $z(n) = -(n+1)/2$ si n est impair.

Question 2 : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Alterner

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$z(n)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	...

$z(n) = n/2$ si n est pair, $z(n) = -(n+1)/2$ si n est impair.

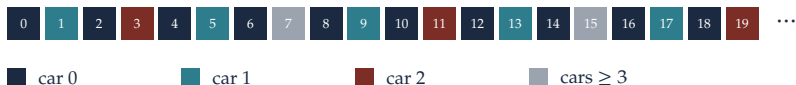
Ce qu'il faut retenir

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, et pourtant $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$: le principe **(E)** échoue une fois de plus.
Et la bijection **ne respecte pas l'ordre** : $z(1) = -1 < 0 = z(0)$.

Question 3 : remplir l'hôtel

Le passager n du car k va dans la chambre $2^k(2n+1) - 1$

Tout entier $m \geq 1$ s'écrit **d'une seule façon** $2^k \times$ (un impair) : $12 = 2^2 \times 3$, $7 = 2^0 \times 7$.



Question 3 : remplir l'hôtel

Le passager n du car k va dans la chambre $2^k(2n+1)-1$

Tout entier $m \geq 1$ s'écrit d'une seule façon $2^k \times$ (un impair) : $12 = 2^2 \times 3$, $7 = 2^0 \times 7$.



Toutes les chambres sont occupées, chacune par une seule personne : **une bijection** $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Question 4 : Berry

« Le plus petit entier naturel qu'on ne peut pas définir en moins de vingt mots »

- Un vocabulaire fini ne donne qu'un nombre **fini** de phrases de moins de vingt mots.
- Elles définissent au plus un nombre fini d'entiers : il existe donc un plus petit entier qu'aucune ne définit.
- Mais la phrase ci-dessus, en quinze mots, le définit !

Question 4 : Berry

« Le plus petit entier naturel qu'on ne peut pas définir en moins de vingt mots »

- Un vocabulaire fini ne donne qu'un nombre **fini** de phrases de moins de vingt mots.
- Elles définissent au plus un nombre fini d'entiers : il existe donc un plus petit entier qu'aucune ne définit.
- Mais la phrase ci-dessus, en quinze mots, le définit !

Une antinomie

Publiée par Russell en 1906, qui l'attribue à G. G. Berry. C'est la notion de « définir » qui doit céder.

La lecture : Zénon, *Physique* VI, 9

La dichotomie

Pour parcourir un stade, il faut d'abord en parcourir la moitié, puis la moitié de ce qui reste, et ainsi de suite.



La dichotomie

Pour parcourir un stade, il faut d'abord en parcourir la moitié, puis la moitié de ce qui reste, et ainsi de suite.



Les points à franchir sont numérotés par $\mathbb{N}$: le n -ième est $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$. Zénon demande de franchir un ensemble **dénombrable** de points.

PARTIE 2

Dénombrable

Définition

Un ensemble A est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$: $A \approx \mathbb{N}$.

Il est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Un nom

Définition

Un ensemble A est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$: $A \approx \mathbb{N}$.

Il est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Déjà rencontrés

Les carrés, les pairs, $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, les nombres premiers, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Un nom

Définition

Un ensemble A est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$: $A \approx \mathbb{N}$.

Il est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Déjà rencontrés

Les carrés, les pairs, $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, les nombres premiers, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Une convention à surveiller

Dans ce cours, un ensemble dénombrable est toujours **infini**. $\{0, 1, \dots, 9\}$ est au plus dénombrable, mais pas dénombrable.

Certains auteurs disent « dénombrable » pour notre « au plus dénombrable » ; en anglais, *countable* a souvent le sens large.

Dénombrer, c'est lister

Une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, c'est une liste

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad \dots$$

où **chaque élément de A apparaît une fois et une seule.**

Dénombrer, c'est lister

Une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, c'est une liste

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad \dots$$

où **chaque élément de A apparaît une fois et une seule.**

Faire défiler tous les éléments, un par un, sans en oublier et sans répétition — de sorte que chacun arrive **après un temps fini.**

Les parties de $\mathbb{N}$

Proposition

Toute partie **infinie** de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Les parties de $\mathbb{N}$

Proposition

Toute partie **infinie** de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Idée de la preuve : lister dans l'ordre croissant

a_0 = le plus petit élément de A ; a_1 = le plus petit élément de A plus grand que a_0 ; et ainsi de suite.

- On ne s'arrête jamais : sinon $A \subseteq \{0, \dots, a_n\}$ serait fini.
- Personne n'est oublié : un $a \in A$ qui a k éléments de A en dessous de lui reçoit le numéro k .

Les parties de $\mathbb{N}$

Proposition

Toute partie **infinie** de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Idée de la preuve : lister dans l'ordre croissant

a_0 = le plus petit élément de A ; a_1 = le plus petit élément de A plus grand que a_0 ; et ainsi de suite.

- On ne s'arrête jamais : sinon $A \subseteq \{0, \dots, a_n\}$ serait fini.
- Personne n'est oublié : un $a \in A$ qui a k éléments de A en dessous de lui reçoit le numéro k .

À l'intérieur de $\mathbb{N}$, entre le fini et le dénombrable, **il n'y a rien**.

Un critère commode

Proposition

Pour un ensemble A non vide, sont équivalents :

- (i) A est au plus dénombrable;
- (ii) il existe une **injection** $A \rightarrow \mathbb{N}$;
- (iii) il existe une **surjection** $\mathbb{N} \rightarrow A$.

Un critère commode

Proposition

Pour un ensemble A non vide, sont équivalents :

- (i) A est au plus dénombrable ;
- (ii) il existe une **injection** $A \rightarrow \mathbb{N}$;
- (iii) il existe une **surjection** $\mathbb{N} \rightarrow A$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

À chaque $a \in A$, associer le **plus petit** n tel que $s(n) = a$. Deux éléments différents reçoivent deux numéros différents.

Un critère commode

Proposition

Pour un ensemble A non vide, sont équivalents :

- (i) A est au plus dénombrable ;
- (ii) il existe une **injection** $A \rightarrow \mathbb{N}$;
- (iii) il existe une **surjection** $\mathbb{N} \rightarrow A$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

À chaque $a \in A$, associer le **plus petit** n tel que $s(n) = a$. Deux éléments différents reçoivent deux numéros différents.

La méthode

Pour montrer qu'un ensemble infini est dénombrable, il suffit d'en faire une **liste** où chaque élément apparaît *au moins* une fois. Les répétitions, on les efface.

Exercice 1 : dénombrable ou non ?

Dénombrable, au plus dénombrable, ou ni l'un ni l'autre ?

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| (a) les entiers naturels pairs | (b) les nombres premiers |
| (c) $\{0, 1, \dots, 9\}$ | (d) $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ |
| (e) les rationnels entre 0 et 1 | (f) les entiers naturels $\geq 10^6$ |

Exercice 1 : dénombrable ou non ?

Dénombrable, au plus dénombrable, ou ni l'un ni l'autre ?

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| (a) les entiers naturels pairs | (b) les nombres premiers |
| (c) $\{0, 1, \dots, 9\}$ | (d) $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ |
| (e) les rationnels entre 0 et 1 | (f) les entiers naturels $\geq 10^6$ |

Réponses

Tous dénombrables, sauf (c) : fini, donc **au plus dénombrable** seulement.

(d) : $(n, i) \mapsto 2n + i$ — le car unique de l'hôtel. (e) : attendre la séance 4.

PARTIE 3

La suite

Séance 4

- Les **couples** : parcourir le quadrillage par diagonales.
- Les **fractions** : combien y en a-t-il ?
- Les **mots finis** : tout ce que l'on peut écrire.
- Les **nombres algébriques**.

Séance 4

- Les **couples** : parcourir le quadrillage par diagonales.
- Les **fractions** : combien y en a-t-il ?
- Les **mots finis** : tout ce que l'on peut écrire.
- Les **nombre algébriques**.

Gardez votre vote sur le car des réels.

SÉANCE 4

Combien y a-t-il de fractions ?

Vendredi 16 octobre